УДК 512.542

Аль-Дабабсех Авни Файез

О формациях n-арных групп

Напомним, что система < G, () > с одной n-арной операцией () называется n-арной группой [1,2], если операция () ассоциативна и каждое из уравнений вида $(xa_1 \dots a_{n-1}) = a$, $(a_1 \dots a_{n-1}\ y) = a$ разрешимо в G. Мы будем использовать терминологию, принятую в монографии С.А. Русакова [2]. В частности, следуя [2] всякую n-арную подгруппу n-арной группы G мы будем называть подгруппой G и если π – некоторая конгруэнция на G, то соответствующую фактор-систему <G/π, ()> (которая, очевидно, является n -арной группой) будем называть фактор-группой G (ср. со стр.64 [2]).

Совокупность n-арных групп X называется классом или иначе абстрактным классом, если со всякой своей n-арной группой X содержит и все ее изоморфные образы.

Следуя Л.А. Шеметкову [3], мы будем называть класс n-арных групп $\mathfrak{F}$ формацией, если выполняются следующие условия:

1) каждая фактор-группа любой n-арной группы G из $\mathfrak{F}$ также принадлежит $\mathfrak{F}$;

2) из $H/\pi \in \mathfrak{F}$, $H/\varphi \in \mathfrak{F}$ всегда следует $H/\pi \cap \varphi \in \mathfrak{F}$.

Если формации n-арных групп $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{F}$ таковы, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$, то мы будем говорить, следуя общепринятой терминологии, что $\mathfrak{M}$ – подформация $\mathfrak{F}$.

Понятно, что пересечение любой совокупности формаций n-арных групп снова является формацией. Формацией является и объединение любой цепи формаций n-арных групп.

К формациям приводят многие условия, накладываемые на классы n-арных групп. Такими условиями, как правило, являются различные ограничения конечности (в частности, формациями являются: класс всех одноэлементных n-арных групп (1), класс всех конечных n-арных групп $\mathfrak{G}$, класс всех периодических n-арных групп [2], класс n-арных групп с условиями минимальности или максимальности для конгруэнций [4] и др.). К формациям приводят и различные "π-ограничения" (в частности, для каждого непустого множества простых чисел π-класс всех конечных n-арных π-групп является формацией). Формацией является и каждый класс n-арных групп, определяемый той или иной системой тождеств (класс абелевых, класс полуабелевых n-арных групп и др.).

В дальнейшем все рассматриваемые нами классы n-арных групп предполагаются входящими в класс конечных n-арных групп $\mathfrak{G}$.

Сопоставим с каждой n-арной группой $\mathfrak{G}$ некоторую ее совокупность подгрупп $\tau(G)$. Будем говорить, следуя Скибе [5], что τ – подгрупповой функтор, если выполняются следующие условия:

1) для любой n-арной группы G имеет место $G \subseteq \tau(G)$;

2) для любого эпиморфизма $\varphi : A \to B$ и для любых подгрупп $H \in \tau(A)$ и $T \in \tau(B)$ имеет место $H^{\varphi} \in \tau(B)$ и $T^{\varphi^{-1}} \in \tau(A)$.

По аналогии с [5] подгрупповой функтор τ назовем:

1) замкнутым, если для любых n-арных групп G и $H \in \tau(G)$ имеет место $\tau(H) \subseteq \tau(G)$;

2) тривиальным, если для любой n-арной группы G имеет место $\tau(G) = \{G\}$;

3) единичным, если для любой n-арной группы G система $\tau(G)$ состоит из всех подгрупп G.

Заметим, что тривиальный и единичный подгрупповой функторы являются примерами замкнутых функторов. Отметим здесь еще следующие примеры.

Пример 1. Пусть для каждой n-арной группы G система $\tau(G)$ состоит из всех инвариантных (полуинвариантных) подгрупп G. Тогда ввиду предложения 6.1. [2] τ – подгрупповой функтор. Нетрудно заметить, что такой функтор замкнутым не является.

Подгруппа H n-арной группы G называется субинвариантной в G, если в G имеется такой ряд подгрупп

$$H = H_0 \subseteq H_\pi \subseteq \ldots \subseteq H_{t-1} \subseteq H_t = G,$$

где H_{i-1} – инвариантная в H_i подгруппа, i = 1, 2,..., t.

Пример 2. Пусть для каждой n-арной группы G система $\tau(G)$ состоит из субинвариантных подгрупп G. Тогда ввиду примера 1 и теоремы 1 (см. ниже) τ – замкнутый подгрупповой функтор.

Пример 3. Пусть $\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$. И пусть для каждой n-арной группы G система $\tau(G)$ совпадает с совокупностью всех тех подгрупп из G, индексы которых не делятся на числа из π. Можно показать, что τ – замкнутый подгрупповой функтор.

Подгруппа H n-арной группы G называется абнормальной в G, если всегда из $H \subseteq M \subseteq G$, где M – подгруппа в G следует, что $M = N_G(M)$.

Пример 4. Пусть для каждой n-арной группы G система $\tau(G)$ состоит из всех абнормальных в G подгрупп. Тогда τ – подгрупповой функтор.

Для любой совокупности подгрупповых функторов $\{\tau_i \mid i \in I\}$ определим их пересечение $\tau = \cap_{i \in I} \tau_i$

$$\tau(G) = \cap_{i \in I} \tau_i(G)$$

для любой n-арной группы. Легко видеть, что если все функторы из $\{\tau_i \mid i \in I\}$ замкнуты, то их пересечение $\cap_{i \in I} \tau_i$ также является замкнутым функтором.

Мы будем писать $\tau_1 \leq \tau_2$, если в любой n-арной группе G выполняется $\tau_1(G) \subseteq \tau_2(G)$.

Пусть теперь τ – произвольный подгрупповой функтор, $\overline{\tau}$ – пересечение всех таких замкнутых функторов τ_i, что $\tau \leq \tau_i$. Функтор $\overline{\tau}$ называется [5] замыканием функтора τ.

Теорема 1. *В том и только в том случае* $T \in \tau(G)$, *когда найдется такое число* t, *что в n-арной группе* G *имеется такой ряд подгрупп*

$$T = T_0 \subseteq T_1 \subseteq \ldots \subseteq T_{t-1} \subseteq T_t = G,$$

где $T_{i-1} \in \tau(T_i)$, i = 1, 2,..., t.

Пусть в дальнейшем τ – некоторый подгрупповой функтор.

Введем следующие операции на классах n-арных групп. Пусть $\mathfrak{X}$ – произвольный класс n-арных групп. Тогда:

$G \in H\mathfrak{X}$ тогда и только тогда, когда G является эпиморфным образом некоторой n-арной группы $A \in \mathfrak{X}$;

$G \in R_0\mathfrak{X}$ тогда и только тогда, когда в G имеется набор конгруэнций $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_t$ ($t \geq 2$) такой, что

$$\bigcap_{i=1}^{n} \pi_i = \Delta,\ G/\pi_i \in \mathfrak{X},\ i = 1, 2, \ldots, t;$$

$G \in D\mathfrak{X}$ тогда и только тогда, когда $G = G_1 \times \ldots \times G_t$, где каждая n-арная группа $G_i \in \mathfrak{X}$;

$G \in S_\tau \mathfrak{X}$ тогда и только тогда, когда $G \in \tau(A)$ для некоторой n-арной группы $A \in \mathfrak{X}$.

Пусть U – некоторая операция на классах n-арных групп. Тогда если $U\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X}$, то говорят класс $\mathfrak{X}$ U-замкнут и если U_1 и U_2 – две операции на классах n-арных групп, то операцию U_1U_2 определяют равенством

$$U_1U_2(\mathfrak{X}) = U_1(U_2\mathfrak{X}).$$

Можно показать, что класс n-арных групп $\mathfrak{F}$ является формацией тогда и только тогда, когда он H-замкнут и R_0-замкнут. Класс n-арных групп $\mathfrak{F}$ называется полуформацией, если он H-замкнут. Следуя [5] класс $\mathfrak{F}$ назовем τ-замкнутым, если $S_\tau \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}$.

Пересечение всех тех τ-замкнутых полуформаций, которые содержат данный класс n-арных групп $\mathfrak{X}$, будем называть τ-замкнутой полуформацией, порожденной $\mathfrak{X}$.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ – τ-замкнутая полуформация, порожденная классом n-арных групп $\mathfrak{X}$. Тогда*

$$\mathfrak{F} = H\, S_{\bar{\tau}}\, \mathfrak{X}.$$

Пусть τform$\mathfrak{X}$ – пересечение всех τ-замкнутых формаций, содержащих совокупность n-арных групп $\mathfrak{X}$. Такую формацию мы будем называть τ-замкнутой формацией, порожденной $\mathfrak{X}$. Для произвольной совокупности n-арных групп $\mathfrak{X}$ символом $(\mathfrak{X})$ обозначают абстрактное замыкание $\mathfrak{X}$, т.е. $G \in (\mathfrak{X})$ тогда и только тогда, когда $G \cong A$ для некоторой n-арной группы $A \in \mathfrak{X}$.

Теорема 3. *Для любой совокупности n-арных групп $\mathfrak{X}$ справедливо равенство*

$$\tau\mathrm{form}\, \mathfrak{X} = HR_0 S_{\bar{\tau}} \mathfrak{X}.$$

Напомним, что через form $\mathfrak{X}$ обозначается [4] формация, порожденная $\mathfrak{X}$.

Следствие 1. Пусть $\mathfrak{X}$ – произвольная совокупность n-арных групп, $S_{\bar{\tau}}(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}$. Тогда

$$\tau\mathrm{form}\, \mathfrak{X} = \mathrm{form}\, \mathfrak{X}.$$

Следствие 2. Для любой совокупности τ-замкнутых формаций $\{\mathfrak{M}_i \mid i \in I\}$ имеет место

$$\tau\mathrm{form}\, (\cup_{i\in I}\mathfrak{M}_i) = \mathrm{form}(\cup_{i\in I}\mathfrak{M}_i).$$

По аналогии с [5] n-арную группу G назовем τ-критической, если G – группа минимального порядка из $\mathfrak{M} \setminus \mathfrak{H}$ для некоторых двух τ-замкнутых формаций $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$.

Теорема 4. *Пусть $\mathfrak{X}$ – τ-замкнутая полуформация n-арных групп и $A \in \mathfrak{F} = \tau\mathrm{form}\, \mathfrak{X}$. Тогда если $A \notin \mathfrak{X}$, то в $\mathfrak{F}$ найдется n-арная группа H с такими конгруэнциями π, $\pi_1, \ldots, \pi_t$, $\psi_1, \ldots, \psi_t$ ($t \geq 2$), что выполняются следующие условия:*

1) $H/\pi \cong A$ *и* $\pi_1 \cap \ldots \cap \pi_t = \triangle$;

2) $H/\pi_i \in \mathfrak{X}$ *и* H/π_i – *τ-критическая n-арная группа с монолитической конгруэнцией* ψ_i/π_i;

3) $\gamma_i = \pi_1 \cap \ldots \cap \pi_{i-1} \cap \pi_{i+1} \cap \pi_t$ – *минимальная конгруэнция на* H, *причем* $\gamma_i \nsubseteq \pi$ и $\pi_i \gamma_i = \psi_i$;

4) $\psi_1 \cap \ldots \cap \psi_i \subseteq \psi$, где $\pi \subseteq \psi$ и ψ/π – *цокольная конгруэнция* [4] *на* H/π.

Следуя [4], через soc($\mathfrak{F}$) мы будем обозначать конгруэнцию, порожденную всеми минимальными конгруэнциями на G. Такая конгруэнция называется цокольной.

Теорема 5. *Пусть* $\mathfrak{X}$ – *τ-замкнутая полуформация и* G ∈ τform $\mathfrak{X}$ \ (1). *Тогда*

$$G/soc(G) \in \tau form(A/soc(A) \mid A \in \mathfrak{X}).$$

Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{M}$ – τ-замкнутые формации и $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{F}$. Тогда если не существует такой τ-замкнутой формации $\mathfrak{H}$, что $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{H} \subset \mathfrak{F}$, то $\mathfrak{M}$ называется максимальной τ-замкнутой подформацией в $\mathfrak{F}$. Обозначим через $\Phi_\tau(\mathfrak{F})$ пересечение всех максимальных τ-замкнутых подформаций τ-замкнутой формации $\mathfrak{F}$ (мы полагаем $\Phi_\tau(\mathfrak{F}) = \mathfrak{F}$, если в $\mathfrak{F}$ нет подформаций такого типа).

Пусть $\mathfrak{F}$ – τ-замкнутая формация n-арных групп, G ∈ $\mathfrak{F}$. Будем говорить, что G является τ-необразующей для $\mathfrak{F}$, если всегда из $\mathfrak{F}$ = τform ($\mathfrak{X}$ ∪ {G}) следует, что $\mathfrak{F}$ = τform $\mathfrak{X}$.

Теорема 6. *Пусть* $\mathfrak{F} \neq (1)$ – *непустая τ-замкнутая формация* n-*арных групп. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $\Phi_\tau(\mathfrak{F})$ *состоит из всех τ-необразующих для* $\mathfrak{F}$ n-*арных групп;*

2) *если* $\mathfrak{M}$ – *τ-замкнутая подформация формации* $\mathfrak{F}$, *то* $\Phi_\tau(\mathfrak{M}) \subseteq \Phi_\tau(\mathfrak{F})$.

Теорема 7. *Пусть* G – *неодноэлементная* n-*арная группа, принадлежащая τ-замкнутой формации* $\mathfrak{F}$. *Тогда* G / soc(G) ∈ $\Phi_\tau(\mathfrak{F})$.

Отметим, что следствиями теоремы 7 являются: утверждение 1.2.28 книги [5]; соответствующая теорема работы [6]; утверждение 53.56 книги [7]. Кроме того, из теоремы 7 вытекает много новых следствий, часть из которых являются новыми и в классе бинарных групп.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Курош А.Г.*** Лекции по общей алгебре. М.: Наука, 1973.
2. ***Русаков С.А.*** Алгебраические n-арные системы. Мн.: Навука і тэхніка, 1992.
3. ***Шеметков Л.А.*** О произведении формаций алгебраических систем // Алгебра и логика, 1984. Т.23, 26. С. 711-729.
4. ***Шеметков Л.А., Скиба А.Н.*** Формации алгебраических систем. М.: Наука, 1989.
5. ***Скиба А.Н.*** Алгебра формаций. Мн., 1997.
6. ***Herzfeld U.C.*** Frattini classes of formations of finite groups // Boll. Un. Mat. Ital. B(7), 1988. P. 601-611.
7. ***Нейман Х.*** Многообразия групп. М.: Мир, 1969.

S U M M A R Y

It is proved that if $\mathfrak{F}$ *is a formation of finite n-ary groups and A* ∈ $\mathfrak{F}$ *then A/soc(A) belongs to every maximal subformation of* $\mathfrak{F}$.