УДК 517.587

Экстремальные полиномы третьей степени комплексного аргумента

Ю.В. Трубников, И.А. Орехова, Сунь Байюй
Учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова»

В данной статье сформулирована схема построения экстремального полинома третьей степени, основанная на субдифференциальных конструкциях. В связи с этим рассмотрен один из возможных случаев построения полиномов вида $P(z)=\left(1-\frac{z}{a-\Delta}\right)\left(1-\frac{z}{a}\right)\left(1-\frac{z}{a+\Delta}\right)$, *заданных на прямоугольнике с вершинами в точках: a+δ+hi, a-δ+hi, a-δ-hi, a+δ-hi, при выполнении условий* $0<\delta<a$, $h>0$, $7h^2<\delta^2$, *и имеющих минимальную чебышевскую норму.*

Ключевые слова: *экстремальный полином третьей степени, комплексный аргумент.*

Extreme third degree polynomials of complex argument

Y.V. Trubnikov, I.A. Orekhova, Syn Baiyi
Educational establishment «Vitebsk State University named after P.M. Masherov»

In this article the scheme of the extreme polynomial of third degree, based on the designs of subdifferential constructions, is considered. In this regard, one of the possible cases of the construction of polynomials of the form $P(z)=\left(1-\frac{z}{a-\Delta}\right)\left(1-\frac{z}{a}\right)\left(1-\frac{z}{a+\Delta}\right)$, *is considered, given on the rectangle with vertices at points: a+δ+hi, a-δ+hi, a-δ-hi, a+δ-hi, under the conditions of* $0<\delta<a$, $h>0$, $7h^2<\delta^2$, *and with minimal Chebyshev norm.*

Key words: *extreme polynomial of third degree, a complex argument.*

В связи с построением экстремальных полиномов в областях, лежащих в комплексной плоскости, напомним некоторые аспекты истории исследования этой задачи.

Отсутствие теоремы об альтернансе привело А.Н. Колмогорова в 1948 году к необходимости сформулировать новый критерий оптимальности приближения функции комплексного аргумента обобщенными полиномами (в частном случае приближения алгебраическими многочленами соответствующий критерий был доказан еще в 1911 году Валле Пуссеном).

Целью данной работы является рассмотрение одного из возможных случаев построения полиномов вида

$$P(z)=\left(1-\frac{z}{a-\Delta}\right)\left(1-\frac{z}{a}\right)\left(1-\frac{z}{a+\Delta}\right),$$

заданных на прямоугольнике с вершинами в точках: *a+δ+hi, a-δ+hi, a-δ-hi, a+δ-hi* при выполнении условий $0<\delta<a$, $h>0$, $7h^2<\delta^2$, и имеющих минимальную чебышевскую норму.

Напомним критерий А.Н. Колмогорова [1].

Определение. Если на замкнутом ограниченном множестве M комплексной плоскости заданы непрерывная функция $f(z)$ и полином $P_n(z)$ (вообще говоря, обобщенный), то всякая точка $z_0\in M$, в которой выполняется равенство

$$\left|f(z_0)-P_n(z_0)\right|= \\ =\left\|f-P_n\right\|:=\max_{z\in M}\left|f(z)-P_n(z)\right|,$$

называется *e*-точкой разности $f-P_n$.

Теорема 1 (А.Н. Колмогоров, 1948). *Пусть на замкнутом ограниченном множестве M комплексной плоскости заданы n+1 фиксированных непрерывных функций*

$$\varphi_0(z),\ \varphi_1(z),\ldots,\ \varphi_n(z)$$

и непрерывная функция f(z), которую следует приблизить обобщенными полиномами вида

$$P_n(z)=\sum_{k=0}^{n}c_k\varphi_k(z). \qquad (1)$$

Тогда для того, чтобы некоторый полином

$$P_n^*(z)=\sum_{k=0}^{n}c_k^*\varphi_k(z)$$

был полиномом наилучшего равномерного приближения (экстремальным полиномом) для функции f(z) в том смысле, что

$$\left\| f - P_n^* \right\| = \inf_{P_n} \left\| f - P_n \right\|,$$

необходимо и достаточно, чтобы на множестве $E = E\left(P_n^*\right)$ *всех e-точек из* M *при любом полиноме* $P_n(z)$ *вида (1) выполнялось неравенство*

$$\min_{z \in E} \operatorname{Re}\left\{ P_n(z) \overline{\left[f(z) - P_n^*(z) \right]} \right\} \le 0. \qquad (2)$$

Трудность использования этого критерия в том, что *e*-точки разности $f - P_n^*$ не известны и в проверяемые условия входит произвольный полином $P_n(z)$.

Еще одним критерием является критерий оптимальности В.К. Иванова–Е.Я. Ремеза (1952, 1953):

Теорема 2 (В.К. Иванов, Е.Я. Ремез). *Для того чтобы для непрерывной на M функции f(z) некоторый полином* $P_n^*(z)$ *вида (1) был полиномом наилучшего приближения, необходимо и достаточно, чтобы существовало множество* $\{z_k\}_1^m \quad (1 \le m \le 2n+3)$*, такое, что*

$$\left| f(z_k) - P_n^*(z_k) \right| = \left\| f - P_n^* \right\|,$$

и положительные числа ρ_k *(k=1, 2, …, m) такие, чтобы при любом полиноме* $P_n(z)$ *вида (1) выполнялось равенство*

$$\sum_{k=1}^{m} \rho_k \overline{\left[f(z_k) - P_n^*(z_k) \right]} P_n(z_k) = 0. \qquad (3)$$

Отметим, что условие (3) проверять легче, чем неравенство (2), однако рассматриваемая проблема является проблемой общей теории экстремальных задач и в данной статье для построения экстремальных полиномов в областях комплексной плоскости авторы применяют классические критерии оптимальности, известные в теории экстремальных задач.

Материал и методы. Напомним, прежде всего, определение субдифференциала нормы. Пусть $\left(E, \|\cdot\|\right)$ – произвольное банахово пространство (действительное или комплексное), $\left(E^*, \|\cdot\|_*\right)$ – пространство, сопряженное пространству E. Функционал $x^* \in E^*$ называется субградиентом нормы в точке $x \in E$, если

$$\forall h(\in E)\, \|x+h\| - \|x\| \ge \operatorname{Re}\left\langle x^*, h \right\rangle, \qquad (4)$$

где Rez – действительная часть комплексного числа z; $\left\langle x^*, h \right\rangle$ – значение функционала x^* на векторе *h*.

Множество всех субградиентов нормы в точке *x* называется субдифференциалом нормы в точке x и обозначается $\partial\|x\|$, т.е.

$$\partial\|x\| = \{x^* \in E^* : \forall h(\in E) \|x+h\| - \\ - \|x\| \ge \operatorname{Re}\left\langle x^*, h \right\rangle\}.$$

Пусть *G* – конечномерное подпространство банахова пространства *E*. Сформулируем фактически предложение 2 из [2, с. 89], но в удобной для дальнейшего изложения форме.

Теорема 3. *Элемент* $y \in G$ *тогда и только тогда является элементом наилучшего приближения точки* $x \notin G$*, когда*

$$\exists \mu\left(\in \partial\|y-x\| \vee \in \partial\|x-y\|\right)$$
$$\forall h(\in G) \operatorname{Re}\langle \mu, h \rangle = 0. \qquad (5)$$

Таким образом, на основе критерия (5) можно сформулировать следующую схему построения экстремального полинома:

1) исходя из некоторого расположения корней полинома P_n, определенного на прямоугольнике комплексной плоскости, найти систему *e*-точек разности *f(z)-P_n(z)*;

2) решить систему уравнений

$$\operatorname{Re}\langle \mu, \varphi_k \rangle = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots, n), \qquad (6)$$
$$\operatorname{Re}\langle \mu, f - P_n \rangle = \|f - P_n\|,$$
$$\mu \in \partial\|f - P_n\|. \qquad (7)$$

Если в результате решения системы уравнений (6)–(7) будет найден соответствующий функционал μ, то этот факт в силу критерия (5) гарантирует экстремальность P_n. Если анализ системы (6)–(7) приведет к факту отсутствия такого функционала, то, изменяя расположение корней полинома P_n, данную схему можно применить еще раз и т.д.

Результаты и их обсуждение.

Лемма 1. *Квадрат модуля полинома*

$$P(z) = \left(1 - \frac{z}{a-\Delta}\right)\left(1 - \frac{z}{a}\right)\left(1 - \frac{z}{a+\Delta}\right)$$

в точках z = a+t+ih выражается следующим образом:

$$g(t) = \left|P(a+t+ih)\right|^2 =$$
$$= \frac{\left(t^2+h^2\right)\left[\left(t^2+\Delta^2+h^2\right)^2 - 4t^2\Delta^2\right]}{a^2\left(a^2-\Delta^2\right)^2}. \qquad (8)$$

Доказательство. Так как

$$\left|P(x+iy)\right|^2 = \left[1 - \frac{2x}{a-\Delta} + \frac{x^2+y^2}{(a-\Delta)^2}\right] \times$$

$$\times\left[1-\frac{2x}{a}+\frac{x^2+y^2}{a^2}\right]\left[1-\frac{2x}{a+\Delta}+\frac{x^2+y^2}{\left(a+\Delta\right)^2}\right],$$

то, подставляя в это выражение $x = a+t$ ($-\delta\le t\le\delta$), получаем требуемый результат.

Лемма 2. *Корнями производной*

$$g'(t)=\frac{t}{a^2\left(a^2-\Delta^2\right)^2}[6t^4+4(3h^2-2\Delta^2)t^2+$$
$$+2(\Delta^4+3h^4)] \qquad (9)$$

являются числа

$$t_1=-\sqrt{s_1},\ t_2=-\sqrt{s_2},\ t_3=0,\ t_4=\sqrt{s_2},\ t_5=\sqrt{s_1},$$

где

$$s_1=\frac{1}{3}\left(2\Delta^2-3h^2+\Delta\sqrt{\Delta^2-12h^2}\right);$$
$$s_2=\frac{1}{3}\left(2\Delta^2-3h^2-\Delta\sqrt{\Delta^2-12h^2}\right).$$

Функция $g'(t)$ меняет знак в точке t_1 с «-» на «+», в точке t_2 с «+» на «-», в точке t_3 с «-» на «+», в точке t_4 с «+» на «-» и в точке t_5 с «-» на «+», т.е. точками локальных максимумов квадрата модуля $\left|P\left(a+t+ih\right)\right|^2$ являются точки t_2 и t_4.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Корень t_3=0 очевиден. После подстановки $s=t^2$ приходим к квадратному уравнению

$$3s^2+2\left(3h^2-2\Delta^2\right)s+\Delta^4+3h^4=0. \qquad (10)$$

При выполнении условия

$$\frac{D}{4}=\left(3h^2-2\Delta^2\right)^2-3\left(\Delta^4+3h^4\right)=$$
$$=9h^4-12h^2\Delta^2+4\Delta^4-3\Delta^4-9h^4=$$
$$=\Delta^2\left(\Delta^2-12h^2\right)>0 \qquad (11)$$

будет выполнено неравенство

$$2\Delta^2-3h^2>0,$$

что обеспечивает существование двух положительных решений уравнения (10):

$$s_1=\frac{1}{3}\left(2\Delta^2-3h^2+\Delta\sqrt{\Delta^2-12h^2}\right);$$
$$s_2=\frac{1}{3}\left(2\Delta^2-3h^2-\Delta\sqrt{\Delta^2-12h^2}\right).$$

В свою очередь, корнями производной $g'(t)$ будут числа $t_1=-\sqrt{s_1}$, $t_2=-\sqrt{s_2}$, $t_3=0$, $t_4=\sqrt{s_2}$, $t_5=\sqrt{s_1}$.

При $t>t_5=\sqrt{s_1}$ квадрат модуля полинома начинает возрастать.

Лемма 3. *Если $7h^2<\delta^2$, то при*

$$\Delta^2=\frac{3}{4}\cdot\frac{\left(\delta^2+h^2\right)^2}{\delta^2-3h^2} \qquad (12)$$

выполняются равенства

$$\left|P\left(a-\delta+ih\right)\right|=\left|P\left(a+\delta+ih\right)\right|=$$
$$=\left|P\left(a-\sqrt{s_2}+ih\right)\right|=\left|P\left(a+\sqrt{s_2}+ih\right)\right|, \qquad (13)$$

кроме того $$\Delta^2-12h^2>0, \qquad (14)$$

$$\frac{1}{3}\left(2\Delta^2-3h^2+\Delta\sqrt{\Delta^2-12h^2}\right)<\delta^2. \qquad (15)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, прежде всего, что выполняется неравенство (14). Действительно,

$$\Delta^2-12h^2=\frac{3}{4}\cdot\frac{\left(\delta^2+h^2\right)^2}{\delta^2-3h^2}-12h^2=$$
$$=\frac{1}{4\left(\delta^2-3h^2\right)}[3\delta^4+6\delta^2h^2+3h^4-$$
$$-48(\delta^2-3h^2)h^2]=\frac{3}{4}\cdot\frac{\left(\delta^2-7h^2\right)^2}{\delta^2-3h^2}>0.$$

Далее докажем неравенство (15):

$$2\Delta^2-3h^2+\Delta\sqrt{\Delta^2-12h^2}=\frac{3}{2}\cdot\frac{\left(\delta^2+h^2\right)^2}{\delta^2-3h^2}-$$
$$-3h^2+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\delta^2+h^2}{\sqrt{\delta^2-3h^2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\delta^2-7h^2}{\sqrt{\delta^2-3h^2}}=$$
$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{\left(\delta^2+h^2\right)^2}{\delta^2-3h^2}+\frac{3}{4}\cdot\frac{\left(\delta^2+h^2\right)\left(\delta^2-7h^2\right)}{\delta^2-3h^2}-$$
$$-3h^2=\frac{1}{4\left(\delta^2-3h^2\right)}[6(\delta^2+h^2)^2+$$
$$+3(\delta^2+h^2)(\delta^2-7h^2)-12(\delta^2-3h^2)h^2]=$$
$$=\frac{1}{4\left(\delta^2-3h^2\right)}[6\delta^4+12\delta^2h^2+6h^4+3\delta^4+$$
$$+3\delta^2h^2-21\delta^2h^2-21h^4-12\delta^2h^2+36h^4]=$$
$$=\frac{1}{4\left(\delta^2-3h^2\right)}\left(9\delta^4-18\delta^2h^2+21h^4\right)=$$
$$=\frac{3}{4\left(\delta^2-3h^2\right)}\left(3\delta^4-6\delta^2h^2+7h^4\right).$$

Далее

$$\frac{3}{4\left(\delta^2-3h^2\right)}\left(3\delta^4-6\delta^2h^2+7h^4\right)-3\delta^2=$$
$$=\frac{3}{4\left(\delta^2-3h^2\right)}(3\delta^4-6\delta^2h^2+7h^4-4\delta^4+$$
$$+12\delta^2h^2)=\frac{3}{4\left(\delta^2-3h^2\right)}(-\delta^4+6\delta^2h^2+7h^4).$$

Покажем, что при выполнении условия $7h^2 < \delta^2$ выполняется неравенство

$$-\delta^4 + 6\delta^2 h^2 + 7h^4 < 0.$$

Действительно, в этом случае $h^2 < \dfrac{\delta^2}{7}$, и тогда

$$-\delta^4 + 6\delta^2 h^2 + 7h^4 < -\delta^4 + 6\delta^2 \frac{\delta^2}{7} + 7 \cdot \frac{\delta^2}{7} \cdot \frac{\delta^2}{7} = 0.$$

Далее в выражение (8) подставим значение

$$t^2 = \frac{1}{3}\left(2\Delta^2 - 3h^2 - \Delta\sqrt{\Delta^2 - 12h^2}\right). \quad (16)$$

Для этого вычислим

$$t^2 + h^2 = \frac{1}{3}\left(2\Delta^2 - 3h^2 - \Delta\sqrt{\Delta^2 - 12h^2}\right) + $$
$$+h^2 = \frac{1}{3}\left(2\Delta^2 - \Delta\sqrt{\Delta^2 - 12h^2}\right); \quad (17)$$
$$t^2 + \Delta^2 + h^2 = \frac{1}{3}\left(2\Delta^2 - 3h^2 - \Delta\sqrt{\Delta^2 - 12h^2}\right) + $$
$$+\Delta^2 + h^2 = \frac{1}{3}\left(5\Delta^2 - \Delta\sqrt{\Delta^2 - 12h^2}\right).$$

Далее

$$\left(t^2 + \Delta^2 + h^2\right)^2 - 4t^2\Delta^2 = $$
$$= \frac{1}{9}\left(5\Delta^2 - \Delta\sqrt{\Delta^2 - 12h^2}\right)^2 - $$
$$-\frac{4}{3}\Delta^2\left(2\Delta^2 - 3h^2 - \Delta\sqrt{\Delta^2 - 12h^2}\right) = $$
$$= \frac{1}{9}[25\Delta^4 - 10\Delta^3\sqrt{\Delta^2 - 12h^2} + $$
$$+\Delta^2\left(\Delta^2 - 12h^2\right) - 24\Delta^4 + 36h^2\Delta^2 + $$
$$+12\Delta^3\sqrt{\Delta^2 - 12h^2}\,] = $$
$$= \frac{2\Delta^2}{9}\left(\Delta^2 + \Delta\sqrt{\Delta^2 - 12h^2} + 12h^2\right).$$

Окончательно,

$$\left|P\left(t + a + ih\right)\right|^2 = $$
$$= \frac{1}{a^2\left(a^2 - \Delta^2\right)^2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(2\Delta^2 - \Delta\sqrt{\Delta^2 - 12h^2}\right) \times $$
$$\times \frac{2\Delta^2}{9} \cdot \left(\Delta^2 + 12h^2 + \Delta\sqrt{\Delta^2 - 12h^2}\right) = $$
$$= \frac{2\Delta^3}{27a^2\left(a^2 - \Delta^2\right)^2}\left(2\Delta - \sqrt{\Delta^2 - 12h^2}\right) \times $$
$$\times \left(\Delta^2 + 12h^2 + \Delta\sqrt{\Delta^2 - 12h^2}\right) = $$
$$= \frac{2\Delta^3}{27a^2\left(a^2 - \Delta^2\right)^2}(2\Delta^3 + 24h^2\Delta + $$
$$+2\Delta^2\sqrt{\Delta^2 - 12h^2} - \Delta^2\sqrt{\Delta^2 - 12h^2} - $$
$$-12h^2\sqrt{\Delta^2 - 12h^2} - \Delta(\Delta^2 - 12h^2)) = $$
$$= \frac{2\Delta^3}{27a^2\left(a^2 - \Delta^2\right)^2}(\Delta^3 + 36h^2\Delta + $$
$$+\Delta^2\sqrt{\Delta^2 - 12h^2} - 12h^2\sqrt{\Delta^2 - 12h^2}) = $$
$$= \frac{2\Delta^3}{27a^2\left(a^2 - \Delta^2\right)^2}[\Delta^3 + 36h^2\Delta + $$
$$+(\Delta^2 - 12h^2)^{\frac{3}{2}}].$$

Далее вычислим значение квадрата модуля полинома при $t^2 = \delta^2$:

$$\left|P\left(a + \delta + ih\right)\right|^2 = $$
$$= \frac{\delta^2 + h^2}{a^2\left(a^2 - \Delta^2\right)^2}\left[(\delta^2 + \Delta^2 + h^2)^2 - 4\delta^2\Delta^2\right].$$

Найдем значение Δ из уравнения

$$\frac{\delta^2 + h^2}{a^2\left(a^2 - \Delta^2\right)^2}\left[(\delta^2 + \Delta^2 + h^2)^2 - 4\delta^2\Delta^2\right] = $$
$$= \frac{2\Delta^3}{27a^2\left(a^2 - \Delta^2\right)^2}[\Delta^3 + 36h^2\Delta + $$
$$+(\Delta^2 - 12h^2)^{\frac{3}{2}}],$$

т.е. из уравнения

$$27\left(\delta^2 + h^2\right)\left[\left(\delta^2 + \Delta^2 + h^2\right)^2 - 4\delta^2\Delta^2\right] = $$
$$= 2\Delta^3\left[\Delta^3 + 36h^2\Delta + \left(\Delta^2 - 12h^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]. \quad (18)$$

Раскроем скобки в левой части уравнения (18) и приведем подобные слагаемые:

$$27(\delta^2 + h^2)[\delta^4 + \Delta^4 + h^4 + 2\delta^2\Delta^2 + 2\delta^2 h^2 + $$
$$+2h^2\Delta^2 - 4\delta^2\Delta^2] = $$
$$= 27(\delta^2 + h^2)(\delta^4 + \Delta^4 + h^4 - 2\delta^2\Delta^2 + $$
$$+2\delta^2 h^2 + 2h^2\Delta^2) = $$
$$= 27(\delta^2 + h^2)[(\delta^2 + h^2)^2 + \Delta^4 + $$
$$+2(h^2 - \delta^2)\Delta^2].$$

Далее

$$2\Delta^3\left[\Delta^3 + 36h^2\Delta + \left(\Delta^2 - 12h^2\right)^{\frac{3}{2}}\right] = $$
$$= 27(\delta^2 + h^2)[(\delta^2 + h^2)^2 + \Delta^4 + $$
$$+2(h^2 - \delta^2)\Delta^2],$$

т.е.

$$2\Delta^6 + \left(45h^2 - 27\delta^2\right)\Delta^4 + $$

$$+2\Delta^3\left(\Delta^2-12h^2\right)^{\frac{3}{2}}-54\left(h^4-\delta^4\right)\Delta^2-$$
$$-27\left(h^2+\delta^2\right)^3=0. \qquad (19)$$

Покажем, что Δ^2, определяемое равенством (12), действительно является решением уравнения (19). Подставим это значение в левую часть уравнения (19).

$$2\cdot\frac{27}{64}\cdot\frac{\left(\delta^2+h^2\right)^6}{\left(\delta^2-3h^2\right)^3}+\frac{9}{16}\left(45h^2-27\delta^2\right)\times$$
$$\times\frac{\left(\delta^2+h^2\right)^4}{\left(\delta^2-3h^2\right)^2}+2\cdot\frac{3\sqrt{3}}{8}\cdot\frac{\left(\delta^2+h^2\right)^3}{\left(\delta^2-3h^2\right)^{\frac{3}{2}}}\times$$
$$\times\frac{3\sqrt{3}}{8}\frac{\left(\delta^2-7h^2\right)^3}{\left(\delta^2-3h^2\right)^{\frac{3}{2}}}-54\cdot\left(h^4-\delta^4\right)\times$$
$$\times\frac{3}{4}\frac{\left(\delta^2+h^2\right)^2}{\delta^2-3h^2}-27\left(\delta^2+h^2\right)^3=$$
$$=\left(\delta^2+h^2\right)^3[\frac{27}{32}\cdot\frac{(\delta^2+h^2)^3}{(\delta^2-3h^2)^3}+$$
$$+\frac{9}{16}\frac{(45h^2-27\delta^2)(\delta^2+h^2)}{(\delta^2-3h^2)^2}+$$
$$+\frac{27}{32}\cdot\frac{(\delta^2-7h^2)^3}{(\delta^2-3h^2)^3}-\frac{81}{2}\cdot\frac{h^2-\delta^2}{\delta^2-3h^2}-27]=$$
$$=\frac{\left(\delta^2+h^2\right)^3}{\left(\delta^2-3h^2\right)^3}[\frac{27}{32}(\delta^2+h^2)^3+$$
$$+\frac{9}{16}(45h^2-27\delta^2)(\delta^2+h^2)(\delta^2-3h^2)+$$
$$+\frac{27}{32}(\delta^2-7h^2)^3-\frac{81}{2}(h^2-\delta^2)(\delta^2-3h^2)^2-$$
$$-27(\delta^2-3h^2)^3]=0.$$

Пусть

$$P\left(a-\delta+hi\right)=re^{i\varphi_1}=r\left(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1\right),$$
$$P\left(a-t+hi\right)=re^{i\varphi_2}=r\left(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2\right),$$
$$P\left(a+t+hi\right)=re^{i\varphi_3}=r\left(\cos\varphi_3+i\sin\varphi_3\right),$$
$$P\left(a+\delta+hi\right)=re^{i\varphi_4}=r\left(\cos\varphi_4+i\sin\varphi_4\right),$$

где

$$t=\sqrt{\frac{1}{3}\left(2\Delta^2-3h^2-\Delta\sqrt{\Delta^2-12h^2}\right)},$$
$$\Delta^2=\frac{3\left(\delta^2+h^2\right)^2}{4\left(\delta^2-3h^2\right)}.$$

Заметив, что

$$\operatorname{Re}P\left(a+t+ih\right)=\frac{t\left(3h^2-t^2+\Delta^2\right)}{a\left(a^2-\Delta^2\right)},$$
$$\operatorname{Im}P\left(a+t+ih\right)=\frac{h\left(h^2-3t^2+\Delta^2\right)}{a\left(a^2-\Delta^2\right)},$$

получаем, что

$$\operatorname{Re}P\left(a+t+ih\right)=-\operatorname{Re}P\left(a-t+ih\right), \quad (20.1)$$
$$\operatorname{Im}P\left(a+t+ih\right)=\operatorname{Im}P\left(a-t+ih\right), \quad (20.2)$$
$$\operatorname{Re}P\left(a+\delta+ih\right)=-\operatorname{Re}P\left(a-\delta+ih\right), \quad (20.3)$$
$$\operatorname{Im}P\left(a+\delta+ih\right)=\operatorname{Im}P\left(a-\delta+ih\right). \quad (20.4)$$

Пусть

$$\cos\varphi_1=\frac{\operatorname{Re}P\left(a-\delta+ih\right)}{\|P\|},$$
$$\sin\varphi_1=\frac{\operatorname{Im}P\left(a-\delta+ih\right)}{\|P\|},$$
$$\cos\varphi_2=\frac{\operatorname{Re}P\left(a-t+ih\right)}{\|P\|},$$
$$\sin\varphi_2=\frac{\operatorname{Im}P\left(a-t+ih\right)}{\|P\|},$$
$$\cos\varphi_3=\frac{\operatorname{Re}P\left(a+t+ih\right)}{\|P\|},$$
$$\sin\varphi_3=\frac{\operatorname{Im}P\left(a+t+ih\right)}{\|P\|},$$
$$\cos\varphi_4=\frac{\operatorname{Re}P\left(a+\delta+ih\right)}{\|P\|},$$
$$\sin\varphi_4=\frac{\operatorname{Im}P\left(a+\delta+ih\right)}{\|P\|}.$$

Из равенств (20.1)–(20.4) следует, что

$$\cos\varphi_3=-\cos\varphi_2,\ \sin\varphi_3=\sin\varphi_2,$$
$$\cos\varphi_4=-\cos\varphi_1,\ \sin\varphi_4=\sin\varphi_1. \qquad (21)$$

Запишем систему уравнений для нахождения функционала μ [3]:

$$\operatorname{Re}\left\langle\mu,z\right\rangle=\operatorname{Re}\{(\cos\varphi_1-i\sin\varphi_1)(a-\delta+$$
$$+ih)\rho_1+(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)(a-t+ih)\rho_2+$$
$$+(\cos\varphi_3-i\sin\varphi_3)(a+t+ih)\rho_3+$$
$$+(\cos\varphi_4-i\sin\varphi_4)(a+\delta+ih)\rho_4\}=$$
$$=[(a-\delta)\cos\varphi_1+h\sin\varphi_1]\rho_1+$$
$$+[(a-t)\cos\varphi_2+h\sin\varphi_2]\rho_2+$$
$$+[(a+t)\cos\varphi_3+h\sin\varphi_3]\rho_3+$$
$$+[(a+\delta)\cos\varphi_4+h\sin\varphi_4]\rho_4;$$
$$\operatorname{Re}\left\langle\mu,z^2\right\rangle=\operatorname{Re}\{(\cos\varphi_1-i\sin\varphi_1)\times$$

$$\times(a-\delta+ih)^2\rho_1+(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)\times$$
$$\times(a-t+ih)^2\rho_2+(\cos\varphi_3-i\sin\varphi_3)\times$$
$$\times(a+t+ih)^2\rho_3+(\cos\varphi_4-i\sin\varphi_4)\times$$
$$\times(a+\delta+ih)^2\rho_4\}=$$
$$=\{[(a-\delta)^2-h^2]\cos\varphi_1+2(a-\delta)h\times$$
$$\times\sin\varphi_1\}\rho_1+\{[(a-t)^2-h^2]\cos\varphi_2+$$
$$+2(a-t)h\sin\varphi_2\}\rho_2+\{[(a+t)^2-h^2]\times$$
$$\times\cos\varphi_3+2(a+t)h\sin\varphi_3\}\rho_3+$$
$$+\{[(a+\delta)^2-h^2]\cos\varphi_4+2(a+\delta)h\sin\varphi_4\}\rho_4;$$
$$\mathrm{Re}\langle\mu,z^3\rangle=$$
$$=\mathrm{Re}\{(\cos\varphi_1-i\sin\varphi_1)(a-\delta+ih)^3\rho_1+$$
$$+(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)(a-t+ih)^3\rho_2+$$
$$+(\cos\varphi_3-i\sin\varphi_3)(a+t+ih)^3\rho_3+$$
$$+(\cos\varphi_4-i\sin\varphi_4)(a+\delta+ih)^3\rho_4\}=$$
$$=\{[(a-\delta)^3-3(a-\delta)h^2]\cos\varphi_1+$$
$$+[3(a-\delta)^2h-h^3]\sin\varphi_1\}\rho_1+$$
$$+\{[(a-t)^3-3(a-t)h^2]\cos\varphi_2+$$
$$+[3(a-t)^2h-h^3]\sin\varphi_2\}\rho_2+$$
$$+\{[(a+t)^3-3(a+t)h^2]\cos\varphi_3+$$
$$+[3(a+t)^2h-h^3]\sin\varphi_3\}\rho_3+$$
$$+\{[(a+\delta)^3-3(a+\delta)h^2]\cos\varphi_4+$$
$$+[3(a+\delta)^2h-h^3]\sin\varphi_4\}\rho_4.$$

Приведем коэффициенты полученной системы к более удобному виду. Для этого каждое из уравнений

$$\begin{cases}\mathrm{Re}\langle\mu,z\rangle=0,\\ \mathrm{Re}\langle\mu,z^2\rangle=0,\\ \mathrm{Re}\langle\mu,z^3\rangle=0\end{cases}\qquad(22)$$

умножим на $a\left(a^2-\Delta^2\right)\|P\|$, тогда система (22) вместе с уравнением $\|\mu\|=1$ примет следующий вид:

$$\begin{cases}\rho_1+\rho_2+\rho_3+\rho_4=1,\\ g_{21}\rho_1+g_{22}\rho_2+g_{23}\rho_3+g_{24}\rho_4=0,\\ g_{31}\rho_1+g_{32}\rho_2+g_{33}\rho_3+g_{34}\rho_4=0,\\ g_{41}\rho_1+g_{42}\rho_2+g_{43}\rho_3+g_{44}\rho_4=0,\end{cases}\qquad(23)$$

где

$$g_{21}=\left(a-\delta\right)[-\delta(3h^2-\delta^2+\Delta^2)]+$$
$$+h^2(h^2-3\delta^2+\Delta^2);$$
$$g_{22}=\left(a-t\right)[-t(3h^2-t^2+\Delta^2)]+$$
$$+h^2(h^2-3t^2+\Delta^2);$$
$$g_{23}=\left(a+t\right)[t(3h^2-t^2+\Delta^2)]+$$
$$+h^2(h^2-3t^2+\Delta^2);$$
$$g_{24}=\left(a+\delta\right)[\delta(3h^2-\delta^2+\Delta^2)]+$$
$$+h^2(h^2-3\delta^2+\Delta^2);$$
$$g_{31}=[(a-\delta)^2-h^2][-\delta(3h^2-\delta^2+\Delta^2)]+$$
$$+2(a-\delta)h^2(h^2-3\delta^2+\Delta^2);$$
$$g_{32}=[(a-t)^2-h^2][-t(3h^2-t^2+\Delta^2)]+$$
$$+2(a-t)h^2(h^2-3t^2+\Delta^2);$$
$$g_{33}=[(a+t)^2-h^2][t(3h^2-t^2+\Delta^2)]+$$
$$+2(a+t)h^2(h^2-3t^2+\Delta^2);$$
$$g_{34}=[(a+\delta)^2-h^2][\delta(3h^2-\delta^2+\Delta^2)]+$$
$$+2(a+\delta)h^2(h^2-3\delta^2+\Delta^2);$$
$$g_{41}=\left[(a-\delta)^3-3(a-\delta)h^2\right]\times$$
$$\times[-\delta(3h^2-\delta^2+\Delta^2)]+[3(a-\delta)^2h-h^3]\times$$
$$\times h(h^2-3\delta^2+\Delta^2);$$
$$g_{42}=\left[(a-t)^3-3(a-t)h^2\right]\times$$
$$\times[-t(3h^2-t^2+\Delta^2)]+[3(a-t)^2h-h^3]\times$$
$$\times h(h^2-3t^2+\Delta^2);$$
$$g_{43}=\left[(a+t)^3-3(a+t)h^2\right]\times$$
$$\times[t(3h^2-t^2+\Delta^2)]+[3(a+t)^2h-h^3]\times$$
$$\times h(h^2-3t^2+\Delta^2);$$
$$g_{44}=\left[(a+\delta)^3-3(a+\delta)h^2\right]\times$$
$$\times[\delta(3h^2-\delta^2+\Delta^2)]+[3(a+\delta)^2h-h^3]\times$$
$$\times h(h^2-3\delta^2+\Delta^2),$$

где

$$\Delta^2=\frac{3\left(\delta^2+h^2\right)^2}{4\left(\delta^2-3h^2\right)},$$

$$t=\sqrt{\frac{1}{3}\left(2\Delta^2-3h^2-\Delta\sqrt{\Delta^2-12h^2}\right)}.$$

Заключение. Результатом данной работы является построенная система (23), которая может быть использована для нахождения функционала μ при заданных значениях *a*, *δ*, *h*. Попытка нахождения аналитического решения данной системы представляет большой интерес и является дальнейшим этапом исследований авторов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дзядык, В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами / В.К. Дзядык. – М.: Наука, 1977. – 512 с.
2. Иоффе, А.Д. Теория экстремальных задач / А.Д. Иоффе, В.М. Тихомиров. – М.: Наука, 1974. – 480 с.
3. Трубников, Ю.В. Экстремальные конструкции в негладком анализе и операторные уравнения с аккретивными нелинейностями / Ю.В. Трубников. – М.: Астропресс-XXI, 2002. – 256 с.

Поступила в редакцию 18.09.2012. Принята в печать 14.12.2012
Адрес для корреспонденции: e-mail: Yurii_Trubnikov@mail.ru – Трубников Ю.В.