УДК 517.936

С.В. Шерегов

О векторе неправильности линейной системы Пфаффа

Рассмотрим вполне интегрируемую систему Пфаффа

$$\frac{\partial x}{\partial t_i} = A_i(t)\,x,\ \ x \in R^n,\ \ t = (t_1, t_2) \geq 0,\ \ i = 1,2, \tag{1}$$

$n \times n$ — матрицы $A_i(t)$ которой непрерывно-дифференцируемы и ограничены при $t \geq 0$. Наряду с ней будем рассматривать возмущенную систему

$$\frac{\partial y}{\partial t_i} = A_i(t)\,y + Q_i(t)\,y,\ \ y \in R^n,\ \ i = 1,2 \tag{2}$$

с непрерывно дифференцируемыми матрицами $Q_i(t)$ для которой также выполняется условие полной интегрируемости.

Известно, что для систем Пфаффа большую роль играет понятие характеристического вектора функций многих переменных [1,]. Для функций двух переменных понятия характеристического вектора, характеристического множества и их свойства приведены в [2], в [3] теория характеристических векторов применяется к исследованию пфаффовых систем (заметим, что в настоящее время под характеристическим вектором понимается вектор противоположный по знаку векторам, введенным в указанных работах). Для исследования по первому приближению устойчивости системы Пфаффа с m-возмущениями в [4] введена вектор-функция неправильности. Векторные аналоги некоторых величин, применяемых при исследовании устойчивости систем обыкновенных уравнений, введены в [5].

В настоящей работе для системы (1) введен вектор неправильности $\sigma(A)$, являющийся векторным аналогом коэффициента неправильности Д.М.Гробмана, и для системы (2) с возмущениями $Q_i(t)$, имеющими характеристические векторы строго меньшие вектора $\sigma(A)$ установлена связь между характеристическими множествами ее решений и характеристическими множествами решений системы (1).

Пусть $X(t) = [x_1(t),\dots, x_n(t)]$ — некоторая фундаментальная матрица решений системы (1), $\bar{x}_j$ — j-ая строка матрицы $X^{-1}(t)$, $j = 1,\dots, n$;

$\|\lambda\| = \max\{ |\lambda_1|, |\lambda_2| \}$ норма вектора.

Обозначим через $\chi[F] = (\chi_1[F], \chi_2[F])$ и $M[F]$ некоторый характеристический вектор и характеристическое множество вектор-функции или матрицы $F(t)$, непрерывной в квадрате $t \ge 0$.

Пусть $M[x_j] + M[\bar{x}_j] = \{ \chi[x_j] + \chi[\bar{x}_j] : \chi[x_j] \in M[x_j], \chi[\bar{x}_j] \in M[\bar{x}_j] \}$. Так как характеристические множества $M[x_j]$ и $M[\bar{x}_j]$ замкнуты [2,3], то замкнуто и множество $M[x_j] + M[\bar{x}_j]$, поэтому найдутся характеристические векторы $\chi_j = (\chi_1^j, \chi_2^j)$ и $\bar{\chi}_j = (\bar{\chi}_1^j, \bar{\chi}_2^j)$ из множеств $M[x_j]$ и $M[\bar{x}_j]$ соответственно, что для любых $\chi[x_j]$ и $\chi[\bar{x}_j]$ выполняется неравенство $\|\chi_j + \bar{\chi}_j\| \le \|\chi[x_j] + \chi[\bar{x}_j]\|$. Вектор $\sigma(A) = (\sigma_1, \sigma_2)$ с компонентами $\sigma_1=\sigma_2= \inf\limits_{X(\bullet)} \max\limits_{j} \|\chi_j + \bar{\chi}_j\|$ назовем вектором неправильности системы (1).

Справедлива следующая

Теорема. Если существуют характеристические векторы $\chi[Q_1]$ и $\chi[Q_2]$, для которых выполняются условия

$$\max\{ \chi_i[Q_1], \chi_i[Q_2] \} = q_i < -\sigma_i, \quad i = 1, 2,$$

то для произвольного нетривиального решения $y(t)$ системы (2) существует конечная совокупность решений системы (1) таких, что объединение их характеристических множеств включает в себя характеристическое множество $M[y]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Запишем решение системы (2) в форме Коши

$$y(t_1, t_2) = \tilde{X}(t_1, t_2)\,[\tilde{X}^{-1}(0, 0)\, y(0.0) + \int\limits_{(0,0)}^{(t_1,t_2)} f_1(\tau_1, \tau_2)\, d\tau_1 + f_2(\tau_1, \tau_2)\, d\tau_2\,],$$

где $f_p(\tau_1, \tau_2) = [\tilde{X}^{-1}(t_1, t_2)\, Q_p(t_1, t_2)\, y(t_1, t_2)$, $p = 1, 2$, а $\tilde{X}(t_1, t_2)$ — фундаментальная матрица решений системы (1), для характеристических векторов которой выполняется неравенство

$$\max_j \|\chi_j + \bar{\chi}_j\| < \sigma_1 + \varepsilon, \qquad (3)$$

при этом положительную константу ε выбираем так, чтобы выполнялись неравенства

$$\varepsilon < -\sigma_i - q_i, \quad i = 1, 2.$$

Так как для j-ой компоненты вектора $f_p(t)$ выполняется равенство $f_p^j(t) = (\bar{x}_j(t), Q_p(t)\, y(t))$, $j = 1,\dots, n$, то по теореме 2.2 [2], какой бы характеристический вектор $\chi[y]$ мы не взяли, существуют характеристические векторы $\chi[f_1^j]$ и $\chi[f_2^j]$ такие, что выполняются неравенства

$$\max_{p=1,2} \{ \chi_i[f_p^j] \} \le \bar{\chi}_i^j + q_i + \chi_i[y] < \bar{\chi}_i^j - \sigma_i - \varepsilon + \chi_i[y], \quad j = 1,\dots, n, \quad i = 1, 2. \qquad (4)$$

Введем в рассмотрение постоянный вектор g_0 и вектор $g(t)$, для компонент которых g_j^0 и $g_j(t)$, $j = 1,\dots, n$ выполняются равенства

$$g_j^0 = \int_{(0,0)}^{(+\infty,+\infty)} f_1^j(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 + f_2^j(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_2 ,$$

$$g_j(t) = \int_{(+\infty,+\infty)}^{(t_1,t_2)} f_1^j(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 + f_2^j(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_2 ,$$

если $\chi_1[f_p^j] < 0$ и $\chi_2[f_p^j] < 0$, $p = 1, 2$;

$$g_j^0 = \int_0^{+\infty} f_1^j(\tau_1,0)\,d\tau_1 ,\ g(t) = \int_0^{t_2} f_2^j(t_1,\tau_2)\,d\tau_2 + \int_{+\infty}^{t_1} f_1^j(\tau_1,0)\,d\tau_1$$

если $\chi_1[f_p^j] < 0$ и хотя бы одно из чисел $\chi_2[f_p^j]$, $p = 1, 2$, неотрицательно;

$$g_j^0 = \int_0^{+\infty} f_2^j(0,\tau_2)\,d\tau_2 ,\ g_j(t) = \int_0^{t_1} f_1^j(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 + \int_{+\infty}^{t_2} f_2^j(0,\tau_2)\,d\tau_2 ,$$

если $\chi_2[f_p^j] < 0$ и хотя бы одно из чисел $\chi_1[f_p^j]$, $p = 1, 2$, неотрицательно;

$g_j^0 = 0$, $g_j(t) = \int_{(0,0)}^{(t_1,t_2)} f_1^j(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 + f_2^j(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_2$ во всех остальных случаях.

Тогда вектор $y(t_1, t_2)$ можно представить в виде

$$y(t_1,t_2) = \tilde{X}(t_1,t_2)\,[\tilde{X}^{-1}(0,0)\,y(0,0) + g_0] + \tilde{X}(t_1,t_2)\,g(t_1,t_2). \qquad (5)$$

Как следует из теоремы 2.7 [2] функция $g_j(t)$ имеет характеристический вектор $v_j = (v_1^j, v_2^j)$, для координат которого выполнены неравенства $v_i^j \le \max\limits_{p=1,2} \{\chi_i[f_p^j]\}$, $i = 1, 2$, $j = 1,\dots, n$, из которых, воспользовавшись оценками (4), имеем неравенства

$$v_i^j < \chi_i^j - \sigma_i - \varepsilon + \chi_i[y],\ i = 1, 2. \qquad (6)$$

По теореме 2.2 [2] с помощью неравенства (6) получаем оценки

$$\chi_i[\,\|x_j\|\,|g_j|\,] < \chi_i^j + \tilde{\chi}_i^j - \sigma_i - \varepsilon + \chi_i[y],\ i = 1, 2,\ j = 1,\dots, n$$

для координат характеристического вектора $\chi[\,\|x_j\|\,|g_j|\,]$. Далее, воспользовавшись неравенством (3) имеем следующее неравенство $\chi[\|x_j\|\,|g_j|] < <\chi[y]$. Учитывая, что выполняется неравенство $\|X(t)\,g(t)\| \le n \sum\limits_{j=1}^{n} [\|x_j\|\,|g_j|]$, по теореме 2.1 [2] получаем следующее утверждение: какой бы характеристический вектор $\chi[y]$ мы ни взяли, найдется характеристический вектор $\chi[X g]$, для которого верно неравенство

$$\chi[\tilde{X} g] < \chi[y] \qquad (7)$$

Докажем теперь, что постоянная $\tilde{X}^{-1}(0,0)\,y(0,0) + g_0$ отлична от нуля. Предположив противное, из представления (5) решения $y(t)$ имеем равенство $y(t) = \tilde{X}(t)\,g(t)$, а вместе с ним и равенство $M[y] = M[\tilde{X} g]$, которое противоречит неравенству (7). Полученное противоречие и доказывает требуемое.

Запишем теперь решение $y(t)$ системы (2) в виде

$$y(t) = x(t) + \tilde{X}(t)\,g(t), \qquad (8)$$

где $x(t) = \tilde{X}(t)\,[\tilde{X}^{-1}(0,0)\,y(0,0) + g_0]$.

Из представления (8) решения y(t) по теореме 2.1 [2] из неравенства (7) получаем следующее утверждение: какой бы характеристический вектор χ [y] произвольного нетривиального решения y(t) системы (2) мы ни взяли, можно указать решение x(t) системы (1), у которого имеется характеристический вектор $\chi[x] = \chi[y]$. Учитывая, что для любого решения y(t) постоянный вектор g_0 принимает лишь конечное число значений (каждая j-ая его компонента имеет один из четырех видов), данное утверждение аналогично формулировке нашей теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Гайшун И.В.*** Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения. Мн.: Наука и техника, 1983.
2. ***Грудо Э.И.*** // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12, № 12. С.2115-2128.
3. ***Грудо Э.И.*** // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 5. С. 826-840.
4. ***Большаков Н.Е., Потапенко П.П.*** // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16, № 5. С. 934-936.
5. ***Ласый П.Г.*** Некоторые задачи теории характеристических векторов: Автореф. дис. физ.-мат. наук. Мн., 1983.

S U M M A R Y

Tht connection between characteristical multitudes of the Pfaff's system solutions and characteristical multitudes of unindignant Pfaff's system is established in this work.